**ESERCITAZIONE 3: esercizio 3**

Lorenzo Aliotta, 5655762

Riccardo Dal Seno, 5605031

Teresa de Jesus Fernandes, 4190022

**Testo**

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamente

**Parte A**

**Obiettivo dell'esperimento**

L’esercizio richiede di analizzare il comportamento del metodo delle potenze nel calcolo degli autovalori dominanti di una matrice quadrata data A. In particolare, si intende esplorare come il metodo delle potenze approssima l'autovalore di modulo massimo e come la scelta del vettore iniziale influenza la convergenza. Inoltre, si esamina il comportamento del metodo in relazione al numero di iterazioni effettuate.

**Descrizione del codice** (file: ‘esercitazione3\_3.m’)

Il codice implementa il metodo delle potenze su una matrice A definita come:

Immagine che contiene diagramma, Carattere, cerchio, design

Descrizione generata automaticamente

e utilizza due vettori iniziali distinti:

v1 = [1; 1; 1]

v2 = [3; 10; 4]

Il metodo delle potenze iterativamente moltiplica il vettore iniziale per la matrice A, normalizzando il risultato a ogni passo, fino a quando la differenza tra vettori consecutivi non scende al di sotto di una tolleranza prefissata, o fino al raggiungimento di un numero massimo di iterazioni.

**Risultati dell'Esperimento** (file: ‘3.3\_output.txt’)

Metodo delle potenze con vettore iniziale [1; 1; 1]:  
Autovalore approssimato: 5  
Numero di iterazioni: 24  
Autovettore approssimato:  
 0.2033  
 0.6505  
 0.7318

Il metodo delle potenze con il vettore iniziale v1 converge rapidamente all'autovalore di modulo massimo. Questo perché il vettore iniziale contiene una componente significativa lungo l'autovettore dominante.

Metodo delle potenze con vettore iniziale [3; 10; 4]:  
Autovalore approssimato: 3  
Numero di iterazioni: 13  
Autovettore approssimato:  
 0.1374  
 0.8242  
 0.5494  
  
\*\*\* Analisi dettagliata del vettore [3; 10; 4] \*\*\*

Autovalore approssimato con 50 iterazioni: 3.0102  
Autovettore approssimato:  
 0.1377  
 0.8234  
 0.5505  
  
Autovalore approssimato con 200 iterazioni: 5  
Autovettore approssimato:  
 0.2033  
 0.6505  
 0.7318

Il metodo delle potenze con il vettore v2 mostra invece un comportamento diverso.   
Inizialmente, a partire da dopo 13 iterazioni, approssima l'autovalore dominante, ma successivamente converge al secondo autovalore più grande, a causa dell'influenza di altre componenti nel vettore iniziale.

**Analisi del comportamento**

**Immagine che contiene testo, schermata, numero, linea

Descrizione generata automaticamente**

Questo comportamento può essere ricondotto ad alcuni fattori:

1. Influenza del vettore iniziale  
Il vettore v1 contiene componenti significative lungo la direzione dell'autovettore dominante, permettendo al metodo delle potenze di convergere rapidamente all'autovalore di modulo massimo.  
Il vettore v2, al contrario, ha componenti che corrispondono ad autovalori di modulo inferiore. Questo porta a un comportamento in cui inizialmente il metodo approssima l'autovalore dominante, ma poi devia verso un altro autovalore.

2. Effetto del numero di iterazioni  
Con 50 iterazioni, il metodo approssima ancora l'autovalore dominante, sebbene con qualche interferenza da parte delle componenti residue; con 200 iterazioni, queste componenti residue diventano più rilevanti, facendo sì che il metodo converga al secondo autovalore più grande.   
Questo effetto è particolarmente visibile nel caso del vettore v2.

3. Convergenza a diversi autovalori  
Il metodo delle potenze non garantisce sempre la convergenza all'autovalore di modulo massimo. Se il vettore iniziale non ha una componente significativa lungo la direzione dell'autovettore corrispondente, il metodo potrebbe convergere verso altri autovalori.

**Conclusioni**

Il metodo delle potenze è un metodo semplice ed efficace per approssimare l'autovalore di modulo massimo di una matrice, ma è fortemente influenzabile dalla scelta del vettore iniziale e dal numero di iterazioni effettuate. Se il vettore iniziale non è scelto con attenzione, o se si effettuano troppe iterazioni, il metodo può deviare dall'autovalore dominante, convergendo invece verso un altro autovalore. Questo esperimento dimostra inoltre come il rumore e le componenti residue possono avere un impatto significativo sulla convergenza del metodo delle potenze, specialmente in presenza di autovalori di modulo simile.

**Parte B**

**Obiettivo dell'esperimento**

L'obiettivo è studiare il comportamento del metodo delle potenze inverse per il calcolo degli autovalori di una matrice. In particolare, l'attenzione è rivolta all'influenza della scelta del valore shift p, che determina la matrice (A−pI) su cui applicare il metodo. L'esperimento analizza come la vicinanza di p a uno degli autovalori di A influisca sulla convergenza e sul successo del metodo delle potenze inverse.

**Descrizione del codice** (file: ‘esercitazione3\_3.m’)

Il codice implementa il metodo delle potenze inverse per determinare gli autovalori di una matrice A.   
Il processo è suddiviso in più punti, ciascuno dei quali esplora il metodo con differenti valori iniziali del vettore e del parametro p.

* Punto A: Il metodo delle potenze standard viene applicato per trovare gli autovalori dominanti della matrice A con diversi vettori iniziali
* Punto B: Il metodo delle potenze inverse viene applicato, utilizzando vari valori di p, per studiare la convergenza agli autovalori di A.   
  Vengono eseguite tre simulazioni:
  + Punto B1: p=7 e vettore iniziale [1;1;1]
  + Punto B2: p=2 e vettore iniziale [3;10;4]

Per ciascuna simulazione, il codice esegue la decomposizione LU della matrice (A−pI), quindi risolve un sistema lineare per calcolare il vettore successivo. Il metodo continua fino a quando la differenza tra vettori consecutivi diventa sufficientemente piccola o il numero massimo di iterazioni viene raggiunto.

**Risultati dell’esperimento** (file: ‘3.3\_output.txt’)

I risultati ottenuti dalle simulazioni evidenziano che:

* Punto B1 (p = 7): Il metodo converge rapidamente a un autovalore di A associato al parametro p. Questo dimostra che, quando p è vicino a uno degli autovalori di A, il metodo delle potenze inverse converge rapidamente a 1/(λ1−p)
* Punto B2 (p = 2): anche in questo caso, il metodo converge a un autovalore associato a p=2, dimostrando che il metodo funziona bene se p è vicino a un autovalore

**Analisi del comportamento**

**Immagine che contiene testo, schermata, linea, Diagramma

Descrizione generata automaticamente**

I valori ottenuti dimostrano che il comportamento del metodo delle potenze inverse è strettamente legato alla scelta del parametro p. In particolare, quando p è molto vicino a uno degli autovalori della matrice A, il metodo tende a convergere rapidamente, rendendo quel particolare autovalore dominante (di modulo massimo) per la matrice (A−pI)−1. Tuttavia, se p si trova a metà tra due autovalori, la convergenza può essere compromessa: il metodo mostrerebbe oscillazioni tra i due autovalori, il che potrebbe portare a risultati instabili o addirittura al fallimento della convergenza.

**Velocità di convergenza**

La velocità di convergenza nel metodo delle potenze dipende dal rapporto tra gli autovalori, in particolare dal rapporto λ2/λ1 ​​. Più questo rapporto è piccolo, più rapida sarà la convergenza. Il termine λ2/λ1 si annulla rapidamente se λ1 è dominante rispetto a λ2.

Nel metodo delle potenze inverse, invece, è lo shift p a giocare un ruolo cruciale. Lo shift permette di focalizzarsi sugli autovalori più vicini ad esso, rendendo 1/( λi -p) l’autovalore dominante.   
Di conseguenza, con una buona scelta dello shift, il metodo delle potenze inverse può convergere più rapidamente rispetto al metodo delle potenze tradizionale, specialmente se il rapporto ​​ λ2/λ1 nel metodo delle potenze è più vicino a 1.

In questo caso:

Metodo delle Potenze

* V1 = [1; 1; 1]

Velocità di convergenza media: circa 0.6  
Osservazioni: questo valore è relativamente stabile e si avvicina a 0.6, indicando che la convergenza è abbastanza lenta

* V2 = [3; 10; 4]  
  Velocità di convergenza media: circa 0.33  
  Osservazioni: la velocità di convergenza è più rapida rispetto al caso di v1, con un valore che si stabilizza attorno a 0.33. Ciò indica che v2 porta a una convergenza più veloce rispetto a v1 nel metodo delle potenze

Metodo delle Potenze Inverse

* Fissati p = 7 e v1 = [1; 1; 1]  
  Velocità di convergenza media: circa 1.0001  
  Osservazioni: il valore superiore a 1 indica che il metodo delle potenze inverse ha una velocità di convergenza molto più rapida rispetto al metodo delle potenze tradizionale. Questo risultato è atteso, dato che il metodo delle potenze inverse, con uno shift ben scelto, tende a convergere molto rapidamente
* Fissati p = 2 e v2 = [3; 10; 4]  
  Velocità di convergenza media: circa 0.33  
  Osservazioni: la velocità di convergenza è quasi identica a quella ottenuta con il metodo delle potenze tradizionale. Questo potrebbe indicare che lo shift p=2 non ha portato ad alcun miglioramento significativo della velocità di convergenza rispetto al metodo delle potenze standard

**Conclusioni**

I risultati confermano che il metodo delle potenze inverse è un potente strumento per calcolare autovalori di una matrice quando il parametro p è stato scelto con cura. La scelta di p vicino a un autovalore di A garantisce una rapida e stabile convergenza. Tuttavia, scegliere un valore di p in una posizione intermedia tra due autovalori principali può portare a oscillazioni e potenzialmente a un fallimento del metodo. Pertanto, per garantire il successo del metodo delle potenze inverse, è essenziale avere una stima ragionevolmente accurata degli autovalori della matrice A e scegliere un valore p di conseguenza